

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Р.А. Ковалевского «Весовые псевдодифференциальные операторы и граничные задачи для вырождающихся эллиптических и параболических уравнений», представленной на соискание ученой степени кандидата физико – математических наук по специальности 01.01.02– дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Проблемы, рассмотренные в диссертации Р.А. Ковалевского, относятся к тому разделу современной теории уравнений с переменными коэффициентами, в котором изучаются качественные свойства вырождающихся эллиптических и параболических уравнений. В работе исследуются граничные задачи для вырождающихся эллиптических и параболических уравнений с переменными коэффициентами. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка были получены в работах С. Г. Михлина и М. И. Вишика. Эллиптико - параболические уравнения второго порядка были изучены О. А. Олейник, Дж. Коном и Л. Ниренбергом. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при степенном характере вырождения было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина. Затем ряд важных результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном характере вырождения был получен в работах С. З. Левендорского, С. Л. Исхокова, В. П. Глушко, А. Д. Баева. Начально - краевая задача для вырождающегося по пространственной переменной параболического уравнения с постоянными коэффициентами была исследована В.П. Богатовой, В.П. Глушко.

В диссертации определен и исследован специальный класс псевдодифференциальных операторов с вырождением. С использованием свойств этих операторов удалось доказать коэрцитивные априорные оценки и теоремы существования решений граничных задач в полупространстве для нового класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений

специального вида, доказать априорные оценки и теоремы о существовании решений общих граничных задач в полупространстве для нового класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, доказать априорные оценки и теоремы о существовании и единственности решения начально - краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами в случае вырождения по пространственной переменной.

Сказанное выше указывает на актуальность темы диссертации Р.А. Ковалевского, новизну и научную важность полученных в ней результатов. Следует отметить что результаты, полученные в диссертационной работе, имеют не только теоретическое значение, но и являются актуальными с точки зрения практических приложений. С помощью таких уравнений описываются многие математические модели процессов с вырождением, то есть таких процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие внутри области, из-за чего вблизи границы может меняться как тип уравнения, так и его порядок.

Остановимся подробнее на содержании диссертации.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, содержится обзор достижений по данной теме, дается общая характеристика работы и формулируются основные результаты работы.

В главе 1 вводится и исследуется новый класс весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим еще от комплексного параметра. Эти операторы построены с помощью специального интегрального преобразования F_α , которое на функциях

$u(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^1)$ можно записать в виде
$$F_\alpha[u(y)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(y) \exp(i\eta \int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}}.$$

Это преобразование действует на весовые производные $D_{\alpha,y} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(y)} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\alpha(y)}$

так же, как преобразование Фурье действует на производные $D_y = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}$, то есть

переводит операцию дифференцирования в операцию умножения на

двойственную переменную. Такое преобразование было впервые рассмотрено в работах В.П. Глушко и А.Д. Баева.

Исследуется новый класс весовых псевдодифференциальных операторов вида

$$K^{(\sigma)}(p, y, D_x, D_{\alpha, y})v(x, y) = F_{\alpha}^{-1} F_{\xi \rightarrow x}^{-1} [\lambda(p, y, \xi, \eta) F_{x \rightarrow \xi} F_{\alpha} [v(x, y)]] .$$

Предполагается, что символ $\lambda(p, y, \xi, \eta)$ весового псевдодифференциального оператора при всех $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $y \in \Omega \subset \bar{R}_+^1$ $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$ и при всех $j = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяет оценкам $|(\alpha(y)\partial_y)^j \partial_{\eta}^l \lambda(p, y, \xi, \eta)| \leq c_{jl} (|p| + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-l}$, $\sigma \in R^1$.

В главе 1 доказаны теоремы о композиции и ограниченности таких весовых псевдодифференциальных операторов в специальных весовых пространствах С. Л. Соболева, теоремы о коммутации этих операторов с операторами дифференцирования, теоремы о предельных при $y \rightarrow +0$ и $y \rightarrow +\infty$ значениях весовых псевдодифференциальных операторов. Кроме того, в главе 1 устанавливается связь весового псевдодифференциального оператора с некоторым интегральным оператором, строится и исследуется сопряженный оператор к весовому псевдодифференциальному оператору и доказывается аналог неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра.

Во второй главе доказываются коэрцитивные априорные оценки решений граничных задач типа задач Дирихле в полупространстве для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений специального вида, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную $\frac{\partial}{\partial y}$. Доказаны коэрцитивные априорные оценки в весовых пространствах С. Л. Соболева решений граничных задач для таких уравнений.

В третьей главе диссертации строятся регуляризаторы граничных задач, рассмотренных во второй главе. Кроме того, в этой главе при дополнительных условиях доказываются теоремы о существовании и единственности решений граничных задач, рассмотренных в главе 2.

Полученные в главах 1 - 3 результаты позволили исследовать в главах 4 и 5 общие граничные задачи в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами. При этом удалось сформулировать условие дополненности для таких задач в алгебраическом виде.

В главе 4 получены коэрцитивные априорные оценки решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, зависящими от комплексного параметра.

В главе 5 построены регуляризаторы общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка. При дополнительных условиях доказаны теоремы о существовании и единственности решения таких задач.

Полученные в главах 4 - 5 результаты позволили в главе 6 доказать априорные оценки и теоремы о существовании и единственности решения начально - краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами в случае вырождения по пространственной переменной.

В качестве недочетов отметим имеющиеся в диссертации опечатки. Например, в правой части равенства (1.4.11) на странице 50 следует писать $c_{p,l}$, а не $c_{p,l}$, на странице 94 в правой части неравенства (2.1.49) вместо φ^{2l+1} следует писать $\varphi^{2(l+1)}$.

Отметим еще, что из доказательств теорем о свойствах весовых псевдодифференциальных операторов видно, что аналогичные теоремы справедливы для символов более общего типа. Поэтому в качестве пожелания соискателю на будущее можно рекомендовать рассмотреть более широкий класс символов и, соответственно, исследовать более широкий круг граничных задач для вырождающихся уравнений. Отмеченные опечатки и пожелание, разумеется, не меняют положительного впечатления от диссертации.

Диссертация Р.А. Ковалевского представляет собой законченное исследование, проведенное на высоком теоретическом уровне. Диссертационная работа представляет собой существенное продвижение в

развитии математических методов исследования граничных задач для вырождающихся уравнений. Несомненна теоретическая ценность результатов диссертационной работы, связанная с исследованием новых классов псевдодифференциальных операторов с вырождением.

Разработанные в диссертации методы исследования краевых задач для вырождающихся эллиптических и параболических уравнений могут быть успешно применены при исследовании качественных свойств решений более широкого класса вырождающихся уравнений и служить основой для новых разработок в теории вырождающихся уравнений.

Основные результаты диссертации являются новыми и актуальными. Они полно и четко доказаны, а также своевременно опубликованы. В списке работ по теме диссертации содержится 5 работ, опубликованных в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Результаты диссертации прошли достаточную апробацию на научных семинарах и международных конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Р.А. Ковалевского удовлетворяет всем требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Ростислав Александрович Ковалевский, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико – математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент,

доктор физико – математических наук,
доцент, профессор кафедры алгебры и дискретной
Южного федерального университета

В.Б. Левенштам

Левенштам Валерий Борисович. Адрес. 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а, мехмат ЮФУ. Тел. 89064252776, E-mail: vleven@math.rsu.ru



Личную подпись В.Б. Левенштама
Удостоверяю
Член секретарь Совета
Южного федерального университета
Мирошниченко О.С.